

Mafi 1 - Mitschrift

Ludwig Schuster

Diese Mitschrift entsteht im Rahmen der Vorlesung Mafi1 bei Herrn Hoffmann an der FU-Berlin im Wintersemester 09/10 und darf gerne ergänzt und optimiert werden. Verbesserungen bitte den Autor (schustel[at]inf.fu-berlin.de) zukommen lassen.

Inhaltsverzeichnis

1	13.10.2009	2
1.1	Organisatorisches	2
1.2	Boolsche Aussagenlogik	2
1.2.1	Was sind 'Aussagen'?	2
1.2.2	Wie bildet man zusammengesetzte Aussagen?	3
1.3	Syntax der Aussagenlogik	3
2	15.10.2009	3
2.1	Rechnen mit Wahrheitswerten, Boolesche Algebra	4
2.2	Semantik von Booleschen Termen	4

1 13.10.2009

1.1 Organisatorisches

Tutorien Siehe Veranstaltungsseite

<http://www.inf.fu-berlin.de/lehre/WS09/mafi1/index.html>

Vorlesungsbeginn

- Dienstag 08:30-10:00

- Donnerstag 10:15-12:45

Literatur siehe KVV Veranstaltungsseite

<https://www.mi.fu-berlin.de/kvv/course.htm?sid=18&cid=8356&iid=1>

Feedback

- Die Studenten haben ein Recht auf **vorbereitete** Tutoren und Dozenten

- Unstimmigkeiten über Tutoren oder Dozenten dürfen und sollen kommuniziert werden.

1.2 Boolesche Aussagenlogik

1.2.1 Was sind 'Aussagen'?

Eine Aussage ist ein Satz (formalsprachlich Gebilde) von dem es sinnvoll ist zu sagen es sei wahr oder falsch.

Grundprinzip: Zweiwertigkeit (wahr \leftrightarrow falsch)

1. wie kann man Aussagen zusammensetzen?
2. Syntax der Aussagenlogik
3. Was ist Wahrheitswert von zusammengesetzten Aussagen?

Grundprinzip: Extensionalitätsprinzip

1. 11 ist eine Primzahl \rightsquigarrow Ja
2. Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ besitzt eindeutige Zerlegung in Primfaktoren. \rightsquigarrow Ja
3. $\sqrt{7}$ ist rationale Zahl. \rightsquigarrow Falsch
4. Jede gerade natürliche Zahl > 2 ist Summe zweier Primzahlen
5. Wenn es für eine natürliche Zahl $n > 2$ natürliche Zahlen x, y, z gibt, mit $x^n + y^n = z^n$, so ist $x + y + z = 0 \rightsquigarrow$ Ja
Beispiel $n = 2 \rightarrow x = 3, y = 4, z = 5 \rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$

1.2.2 Wie bildet man zusammengesetzte Aussagen?

	Notation	Sprechweise
Negation einer Aussage a	$\neg a$	nicht a
Konjunktion von Aussagen a und b	$a \wedge b$	a und b
Disjunktion von a und b	$a \vee b$	a oder b
Implikation von a und b	$a \Rightarrow b$	wenn a ..., dann b
Äquivalenz von a und b	$a \Leftrightarrow b$	a gilt genau dann, wenn b
Antivalenz von a und b	$a \oplus b$	entweder a oder b

1.3 Syntax der Aussagenlogik

V eine Menge von Variablen, A eine Menge von konkreten Aussagen mit feststehenden Wahrheitswert. $true, false$ ist inhalt von A Def: boolsche Formeln (=Boolsche Terme) für V und A .

1. Jedes $v \in V$ und jedes $a \in A$ ist boolscher Term.
2. Wenn t Boolescher Term ist, so ist auch $(\neg t)$ Boolescher Term.
3. Wenn t_1 und t_2 Boolsche Terme, so auch $(t_1 \vee t_2)$ und $(t_1 \wedge t_2)$.
4. Nur was sich durch endlich oft anwenden von (1)-(3) erzeugen lässt, ist Boolescher Term.

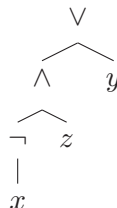
Anmerkung: 1 diese Menge nicht, oder, und heißt Standard Signatur für Boolsche Terme. 2 Klammerung weiderspiegelt Hirarchie.

2 15.10.2009

Die Anmeldung wird in den kommenden Tagen zurückgesetzt - es wird gebeten dass sich ausschließlich dass nur wirklich notwendige Anmeldungen getätigt werden. Alle Teilnehmer die nicht zwingend die Anmeldung zur Übung benötigen, können teilnehmen aber sich bitte nicht anmelden.

Bsp: $V = \{x, y, z\}$ $A = \{true, false\}$ zulässige B.T. $x, y, z, false (\neg x), ((\neg x) \wedge z), (((\neg x) \wedge z) \vee y)$

$$t = (((\neg x) \wedge z) \vee y)$$



→ assoziieren mit Booleschen Term bestimmte “Maßzahlen” z.B. Rang eines booleschen Terms t (“Klammerungstiefe”) Def: $rg(t)$ ist definiert als

1. Wenn $t = v$ für $v \in V$ oder $t = a, a \in A$ so sei $rgt = 0$
2. Wenn $t = (\neg t_1)$ für einen Term t_1 ist, so sei $rgt = rgt_1 + 1$
3. Wenn $t = (t_1 \vee t_2)$ oder $t = (t_1 \wedge t_2)$ so sei $rgt = \max\{rg(t_1), rg(t_2)\} + 1$

$$rg\left(\left((\neg x) \wedge z\right) \vee y\right) = \max\left\{rg\left((\neg x) \wedge z\right), rgy\right\} + 1 \quad (1)$$

$$= rg((\neg x) \wedge z) + 1 \quad (2)$$

$$= rg(\neg x) + 1 + 1 \quad (3)$$

$$= rgx + 1 + 1 + 1 \quad (4)$$

$$= 3 \quad (5)$$

2.1 Rechnen mit Wahrheitswerten, Boolesche Algebra

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbb{B}x\mathbb{B} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ Definitionen Funktionen: $\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ definiert durch $\neg(0) = 1, \neg(1) = 0$ $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus : \mathbb{B}x\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

b_1	b_2	$b_1 \wedge b_2$	$b_1 \vee b_2$	$b_1 \Rightarrow b_2$	$b_1 \Leftrightarrow b_2$	$b_1 \oplus b_2$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

2.2 Semantik von Booleschen Termen

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ Wenn man die Variablen mit konkreten Aussagen belegt, so liefert dies Zuordnung Variable \rightsquigarrow Wahrheitswert (der Aussage)

Belegungsfunktion: $\beta : V \rightarrow \mathbb{B}$ sei $\beta(v_i) = b_i \in \mathbb{B}$ Dies liefert mittels bottom-up-Auswertung. Wahrheitswert des Terms bei dieser Belegung β .

$\beta(x)$	$\beta(y)$	$\beta(z)$	$I_\beta(t)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Definition: Interpretation $I_\beta(t)$ von t bezüglich Belegung β

Falls $t = v$, so sei $I_\beta(t) = \beta(v)$

Falls $t = a, a \in A$ $I_\beta(t) =$ Wahrheitswert von a

insbesondere $I_\beta(true) = 1$

$I_\beta(false) = 0$

Def: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ Die Zuordnung von (b_1, \dots, b_n) mit $b_i = \beta(v_i)$ zu $I_\beta(t)$ liefert eine n -stellige Boolesche Funktion $f_t : \mathbb{B} \times \dots \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ $f_t(b_1, \dots, b_n) = I_\beta(t)$ mittels $f_t(b_1, \dots, b_n) = I_\beta(t) \rightarrow$ Diese Funktion f_t heißt Semantik von Term t .

Def:

1. ein Boolescher Term t heißt erfüllbar, wenn es wenigstens eine Belegung der Variablen gibt, so dass f_t Wert 1 hat.
2. Boolescher Term heißt Tautologie, falls jede Belegung der Variablen für f_t den Wert 1 ergibt.
3. Boolescher Term heißt Kontradiktion, wenn alle Belegungen zu 0 ausgewertet werden.
4. Zwei Terme t_1, t_2 heißen semantisch äquivalent, falls $f_{t_1} = f_{t_2}$ Notation: $t_1 \equiv t_2$